6 класс

6.1. Найдите какое-нибудь решение ребуса $AAAA \times B = BCAB + BAC$. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

6.2. Из клетчатого квадрата 5×5 вырезали центральный квадратик 1×1. Разрежьте оставшуюся фигуру на 6 равных клетчатых фигур. Приведите какой-нибудь один пример разрезания.

6.3. В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега три конфеты, а всем остальным ученикам — по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля — 30, а Вася — 33 конфеты. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

6.4. На годовщине свадьбы родителей Петя сказал, что суммарный возраст его братьев равен 7 годам, а суммарный возраст его сестёр равен 17 годам. Маша сказала, что суммарный возраст её сестёр равен 5 годам, а суммарный возраст её братьев равен 17 годам. Наконец, Коля сказал, что суммарный возраст его братьев и сестёр равен 26 годам. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

6.5. У Пети есть 8 монет, из которых 2 фальшивых, а остальные — настоящие. Настоящие монеты весят одинаково, одна из фальшивых монет на 1 грамм легче настоящих, а другая на 1 грамм тяжелее настоящих. Может ли Петя за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь гарантированно найти хотя бы одну фальшивую монету?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 9 декабря, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 6 класса в 17-00.

XXXIX Московская областная математическая олимпиада

6 класс

6.1. Найдите какое-нибудь решение ребуса $AAAA \times B = BCAB + BAC$. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

6.2. Из клетчатого квадрата 5×5 вырезали центральный квадратик 1×1. Разрежьте оставшуюся фигуру на 6 равных клетчатых фигур. Приведите какой-нибудь один пример разрезания.

6.3. В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега три конфеты, а всем остальным ученикам — по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля — 30, а Вася — 33 конфеты. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

6.4. На годовщине свадьбы родителей Петя сказал, что суммарный возраст его братьев равен 7 годам, а суммарный возраст его сестёр равен 17 годам. Маша сказала, что суммарный возраст её сестёр равен 5 годам, а суммарный возраст её братьев равен 17 годам. Наконец, Коля сказал, что суммарный возраст его братьев и сестёр равен 26 годам. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.

6.5. У Пети есть 8 монет, из которых 2 фальшивых, а остальные — настоящие. Настоящие монеты весят одинаково, одна из фальшивых монет на 1 грамм легче настоящих, а другая на 1 грамм тяжелее настоящих. Может ли Петя за 4 взвешивания на чашечных весах без гирь гарантированно найти хотя бы одну фальшивую монету?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

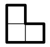
Сегодня, 9 декабря, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 6 класса в 17-00.

7 класс

7.1. Сколько решений имеет ребус $ABBB \times C + AC = CBAC$? Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

7.2. На день рождения к сладкоежке Васе пришли друзья. Каждый мальчик принёс по 5 конфет, а каждая девочка принесла по 2 пирожных. Потом каждый мальчик (кроме Васи) съел по 4 пирожных, а каждая девочка — по 2 конфеты. А сладкоежке Васе достались только 3 конфеты и не досталось пирожных. Сколько друзей пришли на день рождения к Васе?

7.3. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке  (повёрнутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всём квадрате также положительна?

7.4. В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега четыре конфеты, а всем остальным ученикам — по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля — 32, а Вася — 37 конфет. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

7.5. У каждого из 30 ребят ровно один враг среди остальных. (Вражда взаимна.) Они встали по кругу. После этого некоторые из ребят сказали: «Между мной и моим врагом стоят ровно трое ребят», а каждый из остальных сказал: «Между мной и моим врагом стоят ровно пять ребят». Могли ли все они сказать правду?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 9 декабря, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

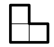
Начало разбора для 7 класса в 18-00.

XXXIX Московская областная математическая олимпиада

7 класс

7.1. Сколько решений имеет ребус $ABBB \times C + AC = CBAC$? Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

7.2. На день рождения к сладкоежке Васе пришли друзья. Каждый мальчик принёс по 5 конфет, а каждая девочка принесла по 2 пирожных. Потом каждый мальчик (кроме Васи) съел по 4 пирожных, а каждая девочка — по 2 конфеты. А сладкоежке Васе достались только 3 конфеты и не досталось пирожных. Сколько друзей пришли на день рождения к Васе?

7.3. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке  (повёрнутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всём квадрате также положительна?

7.4. В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега четыре конфеты, а всем остальным ученикам — по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля — 32, а Вася — 37 конфет. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

7.5. У каждого из 30 ребят ровно один враг среди остальных. (Вражда взаимна.) Они встали по кругу. После этого некоторые из ребят сказали: «Между мной и моим врагом стоят ровно трое ребят», а каждый из остальных сказал: «Между мной и моим врагом стоят ровно пять ребят». Могли ли все они сказать правду?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 9 декабря, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 7 класса в 18-00.

8 класс

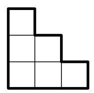
8.1. Учитель математики Василий Иванович 31 декабря 2011 года получил письмо, в котором было написано: «Вы можете оказаться победителем лотереи и выиграть миллион! Чтобы узнать, выиграли ли Вы, нужно взять год своего рождения и оставить число, записанное двумя последними цифрами. К этому числу нужно прибавить свой возраст. Если получится 111, то Вы тот редкий счастливчик, которому повезло! Отправив сегодня 100 рублей для оформления документов, Вы получите миллион!» Но Василий Иванович не поверил в такие обещания. Почему?

8.2. В клетках таблицы 3×3 записаны числа, сумма которых равна 0. Оказалось, что произведение чисел в любом прямоугольнике, состоящем из двух клеток, равно -5. Какое наименьшее число могло оказаться в углу таблицы?

8.3. Назовём *двойным* число, являющееся произведением двух последовательных натуральных чисел. Из четырёх последовательных натуральных чисел образовали два двойных: произведение первых двух и произведение последних двух чисел. Докажите, что сумма этих двойных чисел на 2 больше произведения каких-то двух двойных чисел.

8.4. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы BC прямоугольного треугольника ABC параллельно прямой AB, пересекает продолжение биссектрисы BL угла ABC за точку L в точке P. Докажите, что $\angle ACP = \frac{1}{2}\angle ABC$.

8.5. Клетчатая доска 100×100 разрезана на шестиклеточные «лесенки» (см. рис.) и прямоугольники 2×1. Может ли оказаться, что «лесенок» ровно 333? (Лесенки и прямоугольники могут быть повёрнуты как угодно.)



Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 9 декабря, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 8 класса в 19-00.

XXXIX Московская областная математическая олимпиада

8 класс

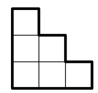
8.1. Учитель математики Василий Иванович 31 декабря 2011 года получил письмо, в котором было написано: «Вы можете оказаться победителем лотереи и выиграть миллион! Чтобы узнать, выиграли ли Вы, нужно взять год своего рождения и оставить число, записанное двумя последними цифрами. К этому числу нужно прибавить свой возраст. Если получится 111, то Вы тот редкий счастливчик, которому повезло! Отправив сегодня 100 рублей для оформления документов, Вы получите миллион!» Но Василий Иванович не поверил в такие обещания. Почему?

8.2. В клетках таблицы 3×3 записаны числа, сумма которых равна 0. Оказалось, что произведение чисел в любом прямоугольнике, состоящем из двух клеток, равно -5. Какое наименьшее число могло оказаться в углу таблицы?

8.3. Назовём *двойным* число, являющееся произведением двух последовательных натуральных чисел. Из четырёх последовательных натуральных чисел образовали два двойных: произведение первых двух и произведение последних двух чисел. Докажите, что сумма этих двойных чисел на 2 больше произведения каких-то двух двойных чисел.

8.4. Прямая, проходящая через середину M гипотенузы BC прямоугольного треугольника ABC параллельно прямой AB, пересекает продолжение биссектрисы BL угла ABC за точку L в точке P. Докажите, что $\angle ACP = \frac{1}{2}\angle ABC$.

8.5. Клетчатая доска 100×100 разрезана на шестиклеточные «лесенки» (см. рис.) и прямоугольники 2×1. Может ли оказаться, что «лесенок» ровно 333? (Лесенки и прямоугольники могут быть повёрнуты как угодно.)



Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 9 декабря, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 8 класса в 19-00.

9 класс

9.1. Ненулевые числа x, y, z, t таковы, что
$$\left(x+\frac{1}{yzt}\right)\left(y+\frac{1}{ztx}\right)\left(z+\frac{1}{txy}\right)\left(t+\frac{1}{xyz}\right)>0.$$
Докажите, что $xyzt>0$.

9.2. Может ли сумма 100 последовательных натуральных чисел оканчиваться той же цифрой, что и сумма следующих 98 чисел?

9.3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. На продолжении диагонали BD за точку D выбрана точка F такая, что $AF \parallel BC$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ADF, касается прямой AC.

9.4. На доске в строку написали несколько различных натуральных чисел. Потом под каждым числом записали новое число, равное его сумме с произведением остальных чисел первой строки. После этого все числа первой строки стерли. (Например, если в первой строке были написаны числа 2, 5, 7, то на доске останутся числа $2+5\cdot7$, $5+2\cdot7$, $7+2\cdot5$.) Докажите, что среди оставшихся на доске чисел не могло оказаться трёх последовательных натуральных чисел.

9.5. В клетках квадрата 10×10 расставлены действительные числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке  (повёрнутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем квадрате также положительна?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 9 декабря, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 9 класса в 17-00.

XXXIX Московская областная математическая олимпиада

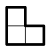
9 класс

9.1. Ненулевые числа x, y, z, t таковы, что
$$\left(x+\frac{1}{yzt}\right)\left(y+\frac{1}{ztx}\right)\left(z+\frac{1}{txy}\right)\left(t+\frac{1}{xyz}\right)>0.$$
Докажите, что $xyzt>0$.

9.2. Может ли сумма 100 последовательных натуральных чисел оканчиваться той же цифрой, что и сумма следующих 98 чисел?

9.3. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. На продолжении диагонали BD за точку D выбрана точка F такая, что $AF \parallel BC$. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ADF, касается прямой AC.

9.4. На доске в строку написали несколько различных натуральных чисел. Потом под каждым числом записали новое число, равное его сумме с произведением остальных чисел первой строки. После этого все числа первой строки стерли. (Например, если в первой строке были написаны числа 2, 5, 7, то на доске останутся числа $2+5\cdot7$, $5+2\cdot7$, $7+2\cdot5$.) Докажите, что среди оставшихся на доске чисел не могло оказаться трёх последовательных натуральных чисел.

9.5. В клетках квадрата 10×10 расставлены действительные числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке  (повёрнутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем квадрате также положительна?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 9 декабря, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 9 класса в 17-00.

10 класс

10.1. В круг встали 5 мальчиков. Могло ли оказаться, что количество денег у любых двух ребят, стоящих через одного, отличается ровно на 5 рублей?

10.2. Найдите все такие пары действительных чисел x и y ($y \neq 0$), что числа $x+\frac{1}{y}$, $2x+\frac{1}{y^2}$ и $3x+\frac{1}{y^3}$ являются последовательными натуральными числами (именно в этом порядке).

10.3. Все три тангенса удвоенных углов треугольника равны. Найдите эти углы. (Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет.)

10.4. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки K, L и M так, что отрезки AK, BL и CM пересекаются в некоторой точке P. Пусть ω_1, ω_2 и ω_3 — круги, описанные около треугольников APL, BPM и CPK соответственно. Оказалось, что круги ω_1 и ω_2 покрывают целиком сторону AB, круги ω_2 и ω_3 — сторону BC, а круги ω_3 и ω_1 — сторону CA. Докажите, что стороны треугольника ABC также целиком покрываются кругами, описанными около треугольников APM, BPK и CPL.

10.5. Вершины правильного 11-угольника раскрашены в два цвета: красный и синий. Может ли оказаться так, что для каждой вершины A этого 11-угольника найдутся такие красные вершины B и C, а также синие вершины D и E, что выполняются равенства $AB = AC$ и $AD = AE$?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 9 декабря, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 10 класса в 18-00.

XXXIX Московская областная математическая олимпиада

10 класс

10.1. В круг встали 5 мальчиков. Могло ли оказаться, что количество денег у любых двух ребят, стоящих через одного, отличается ровно на 5 рублей?

10.2. Найдите все такие пары действительных чисел x и y ($y \neq 0$), что числа $x+\frac{1}{y}$, $2x+\frac{1}{y^2}$ и $3x+\frac{1}{y^3}$ являются последовательными натуральными числами (именно в этом порядке).

10.3. Все три тангенса удвоенных углов треугольника равны. Найдите эти углы. (Перечислите все возможные ответы и докажите, что других нет.)

10.4. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны соответственно точки K, L и M так, что отрезки AK, BL и CM пересекаются в некоторой точке P. Пусть ω_1, ω_2 и ω_3 — круги, описанные около треугольников APL, BPM и CPK соответственно. Оказалось, что круги ω_1 и ω_2 покрывают целиком сторону AB, круги ω_2 и ω_3 — сторону BC, а круги ω_3 и ω_1 — сторону CA. Докажите, что стороны треугольника ABC также целиком покрываются кругами, описанными около треугольников APM, BPK и CPL.

10.5. Вершины правильного 11-угольника раскрашены в два цвета: красный и синий. Может ли оказаться так, что для каждой вершины A этого 11-угольника найдутся такие красные вершины B и C, а также синие вершины D и E, что выполняются равенства $AB = AC$ и $AD = AE$?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 9 декабря, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте `www.100ege.ru`. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 10 класса в 18-00.

11 класс

11.1. Числа x, y, z и t таковы, что $x > y^3$, $y > z^3$, $z > t^3$, $t > x^3$. Докажите, что $xyzt > 0$.

11.2. Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит число $a > 1$ и его квадрат. Докажите, что она также содержит и куб числа a.

11.3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x) = x - 1$ и $f(x) = 2 - 2x$ имеют ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

11.4. Сфера Ω касается каждого из боковых рёбер SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$, а также касается её основания в центре описанной около него окружности. Докажите, что центр сферы лежит на высоте пирамиды.

11.5. В клетках квадрата 7×7 расставлены действительные числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке  (повёрнутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем квадрате также положительна?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 9 декабря, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте www.100ege.ru. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 11 класса в 19-00.

XXXIX Московская областная математическая олимпиада

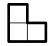
11 класс

11.1. Числа x, y, z и t таковы, что $x > y^3$, $y > z^3$, $z > t^3$, $t > x^3$. Докажите, что $xyzt > 0$.

11.2. Бесконечная арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит число $a > 1$ и его квадрат. Докажите, что она также содержит и куб числа a.

11.3. Квадратный трёхчлен $f(x)$ таков, что каждое из уравнений $f(x) = x - 1$ и $f(x) = 2 - 2x$ имеют ровно по одному решению. Докажите, что трёхчлен $f(x)$ не имеет корней.

11.4. Сфера Ω касается каждого из боковых рёбер SA, SB, SC треугольной пирамиды $SABC$, а также касается её основания в центре описанной около него окружности. Докажите, что центр сферы лежит на высоте пирамиды.

11.5. В клетках квадрата 7×7 расставлены действительные числа. Оказалось, что сумма чисел в любом трёхклеточном уголке  (повёрнутом как угодно) положительна. Обязательно ли сумма чисел во всем квадрате также положительна?

Условия сдавать не нужно. Вы можете забрать их с собой.

Сегодня, 9 декабря, будет проведен онлайн-разбор решений задач олимпиады. Для участия необходимо заранее (за час) зарегистрироваться на сайте www.100ege.ru. Разбор проводят составители олимпиады. Вы сможете задать им свои вопросы.

Начало разбора для 11 класса в 19-00.